Μαθημα 3ο — ΑΕΣΔΕ

Εργαστηρια Παρασκευη 16:00-18:00 — 29/10/2018

Αναπληρωση Παρασκευη 16:00-18:00

■ Επαναληψη τα προηγουμενα συνοπτικά

(1) ΠΑΤ: $\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(a) = y_0 \end{cases}$ $\quad f \in C([a,b] \times \mathbb{R})$

Ψαχνω να βρω την λυση y που ικανοποιει το ΠΑΤ με $y \in C^1[a,b]$

• **Καλά ορισμενα**: 1) Υπαρξη και μοναδ. λυσης $\boxed{\text{Θ.1 και Θ.2}}$

2) Συνεχης εξαρτηση απο αρχικα δεδομενα

▶ Νορμες

$\|\cdot\|$, $\mathbb{R}^3$, $d = \sqrt{(y_1-x_1)^2 + (y_2-x_2)^2 + (y_3-x_3)^2}$

$\|\bar{x}\|_\infty = \max(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|)$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ νορμα απειρου

$\|\bar{x}\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2}$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, Ευκλειδεια νορμα

$\|\bar{x}\|_p = \left(\sum_{i} |x_i|^p\right)^{1/p}$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, νορμα-p

■ Εστω οτι η f ικανοποιει τη συνθηκη

(*) $\forall t \in [a,b]$, $\forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}$, $(f(t,y_1) - f(t,y_2))(y_1 - y_2) \leq 0$

Η συνθηκη ονομαζεται "μονοπλευρη συνθηκη Lipschitz"

■ Παρατηρηση:

Κινητρο για την (*) προερχεται απο τις εφαρμογες και απο το γεγονος οτι εμεις θα γενικευσουμε για συστηματα ΣΔΕ

2 ▸ Στη βαθμωτη περιπτωση με την οποια δουλευουμε, εδω αυτη η συνθηκη σημαινει οτι η f ειναι φθινουσα συναρτηση της 2ης μεταβλητης y, $t \in [a,b]$

■ Θεώρημα 4:

Έστω $y_0, z_0 \in \mathbb{R}$ και θεωρούμε:

$$\begin{cases} y' = f(t, y(t)) \\ y(a) = y_0 \end{cases}, \ t \in [a,b] \ , \quad \begin{cases} z' = f(t, z(t)) \\ z(a) = z_0 \end{cases}, \ t \in [a,b]$$

και τώρα ισχύει για την f η μονόπλευρη Lipschitz, τότε

$$\|\varepsilon(t)\|_\infty = \max_{t \in [a,b]} |y(t) - z(t)| \leq \underbrace{|y_0 - z_0|}_{= |\varepsilon_0|}$$

σε σχέση με το Θ.3 τώρα δεν έχω σταθερά C

■ Απόδειξη

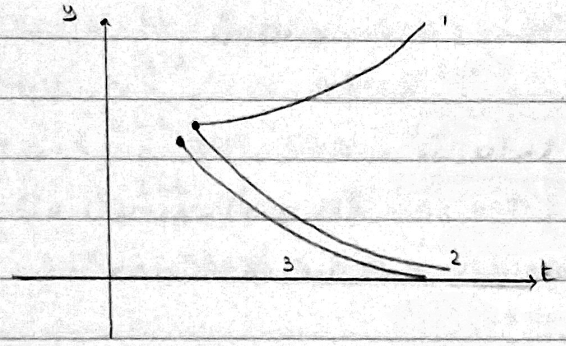
Ορίζουμε $\varepsilon(t) = y(t) - z(t)$, $\varepsilon'(t) = y'(t) - z'(t) = f(t,y) - f(t,z)$

άρα $\varepsilon(t)\varepsilon'(t) = \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{dt}(\varepsilon^2(t)) = (f(t,y) - f(t,z))(y-z) \leq 0 \Rightarrow \frac{1}{2}(\varepsilon^2(t))' \leq 0$

$\Rightarrow$ $\varepsilon^2(t)$ φθίνουσα συνάρτηση, ομοίως και η $|\varepsilon(t)|$ φθίνουσα συνάρτηση

άρα $|y(t) - z(t)| \leq |y_0 - z_0|$, $\forall t \in [a,b]$, $\Rightarrow \|\varepsilon(t)\|_\infty \leq |\varepsilon_0|$

άρα οι λύσεις είναι ευσταθείς



1, 2 όχι ευσταθείς

2, 3 ευσταθείς

■ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Στην "μονόπλευρη Lipschitz" δεν υπεισέρχεται η σταθερά L από την συνθήκη προκύπτει η <u>μοναδικότητα</u> της λύσης ενώ από τη συνέχεια της f, προκύπτει η <u>ύπαρξη</u> της λύσης.

■ **Προβληματα Δοκιμης** Γραμμική περίπτωση

Αν η f ειναι γραμμικη ως προς την $y(t)$, δηλαδη $f(t,y) = \lambda(t)\, y(t) + q(t)$ τοτε η f ικανοποιει την "μονοπλευρη Lipschitz" αν το $\lambda(t)$ ειναι μη θετικο $(\lambda(t) \leq 0)$

- Αρα, αφου μιλαμε για ευσταθεια, μιλαμε για διαφορα λυσεων στην γραμμικη περιπτωση θα μπορουμε να θεωρησουμε το ομογενες προβλημα

$$(*) \quad \begin{cases} y'(t) = \lambda(t)\, y(t), & t \in [a,b] \\ y(a) = y_0 \end{cases} \quad \leftarrow \boxed{\text{Προβλημα δοκιμης}}$$

Τοτε η εκτιμηση της ευσταθειας του $(*)$ ειναι:

$$\max_{t \in [a,b]} |y(t)| \leq |y_0|$$

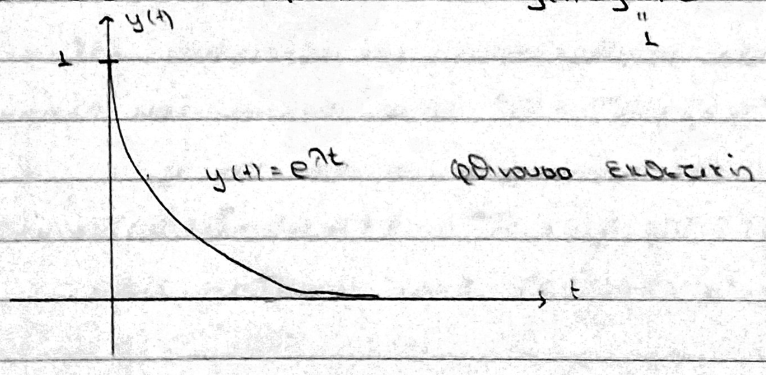
(1) πληρειται η μονοπλευρη Lipschitz
(2) η $\lambda(t)$ παιρνει μη θετικες τιμες $\lambda(t) \leq 0$

απο θεωρημα 4, ισχυει

▸ Το προβλημα δοκιμης που θα μας απασχολησει

$$(*)(*) \quad \begin{cases} y'(t) = \lambda y(t), & t \geq 0, \ \lambda \in \mathbb{R}^- \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Αυτο εχει αναλυτικη λυση την $y(t) = \underset{1}{\underset{\shortparallel}{y(0)}} e^{\lambda t} = e^{\lambda t}$



Συστήματα ΣΔΕ

Γενίκευση των προηγούμενων για συστήματα ΣΔΕ $1^{ης}$ τάξης

Έστω $m \in \mathbb{N}$, $\bar{f}: [a,b] \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, $\bar{y}_0 \in \mathbb{R}^n$, τότε ζητάω συνάρτηση $\bar{y}: [a,b] \times \mathbb{R}^m$ τ/ω να ικανοποιεί το παρακάτω ΠΑΤ

$$(2) \begin{cases} \bar{y}' = \bar{f}(t, \bar{y}(t)) & , t \in [a,b] \\ \bar{y}(a) = \bar{y}_0 \end{cases}$$

παράδειγμα

$$\begin{cases} y_1' = f_1(t, y_1, y_2) & , t \in [a,b] \\ y_2' = f_2(t, y_1, y_2) \\ y_1(a) = y_1 \\ y_2(a) = y_2 \end{cases}$$

Παρατήρηση

Τα αποτελέσματα που ισχύουν για την βαθμωτή περίπτωση δηλ (1), μπορούν να γενικευτούν για την (2) αν αντικαταστήσω την $|\cdot|$ με τη νόρμα $\|\cdot\|$ του $\mathbb{R}^m$

Θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας για συστήματα ΣΔΕ

Έστω ότι η ① $\bar{f}: [a,b] \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ είναι συνεχής και ② πληροί την συνθήκη του Lipschitz ομοιόμορφα ως προς τη y.

③ $\exists L \in \mathbb{R}$, $\forall t \in [a,b]$, $\forall \bar{y}_1, \bar{y}_2 \in \mathbb{R}^m$: $\|\bar{f}(t,\bar{y}_1) - \bar{f}(t,\bar{y}_2)\| \leq L\|\bar{y}_1 - \bar{y}_2\|$

Τότε, $\forall \bar{y}_0 \in \mathbb{R}^m$, το ΠΑΤ (2) έχει μοναδική λύση

$$\boxed{\|\bar{y}_1 - \bar{y}_2\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{m} (y_1^i - y_2^i)^2\right)^{1/2}}$$

παράδειγμα

$\bar{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, $\bar{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$

$$\|\bar{y} - \bar{z}\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{2} (y_i - z_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{(y_1-z_1)^2 + (y_2-z_2)^2}$$

▸ Τα ΠΑΤ ανώτερης τάξης μπορούν να αναχθούν σε συστήματα ΣΔΕ 1ης τάξης

παράδειγμα

$$(4)\begin{cases} y^{(m)}(t) = f(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(m-1)}(t)) & , t \in [a,b] \\ y^{(i)}(a) = y_i & , i = 0,1,2,\dots,m-1 \end{cases}$$

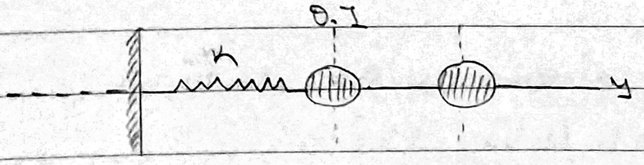
Αν θέσω ως $\bar{z}(t) = (y(t), y'(t), \dots, y^{(m-1)}(t))^T$, $z_0(t) = (y_0, y_1, \dots, y_{m-1})^T$

Τότε το (4) γράφεται ως εξής

$$\begin{cases} z_1'(t) = z_2(t) \\ z_2'(t) = z_3(t) \\ \vdots \\ z'_{m-1} = z_m \\ z'_m = f(t, z_1, z_2, \dots, z_m) \\ \bar{z}(a) = \bar{z}_a \end{cases}$$

παράδειγμα

Απλός αρμονικός ταλαντωτής



Από Νόμο Hooke

$$\frac{d^2y}{dt^2} = y'' = -k \cdot y \Rightarrow$$

$$y'' + ky = 0$$

• κάνει ταλαντώσεις γύρω από την Θ.Ι και δεν σβήνει ποτέ.

Θα χρειαστώ 2 αρχικές συνθήκες για να το λύσω, διότι έχω y'' (δεύτερης τάξης)

Οι δυο αρχικες συνθηκες ειναι

$y(0)=A$ μετατοπισμ

$y'(0)=0$ ταχυτητα

Θετω $\begin{cases} y'=x \\ x'=-\lambda y \\ x(0)=0 \ , \ y(0)=A \end{cases}$ ⊛ Το σπαω σε ΣΔΕ για να το λυσω με αυτα που ξερω για 1ης ταξης

■ <u>ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ ΓΙΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΣΔΕ</u>

Εστω οτι η $\bar{f}: [a,b] \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ συνεχης και η $\bar{f}$ ικανοποιει την μονοπλευρη Lipschitz ως προς τη δευτερη μεταβλητη $\bar{y}$

(S) $\forall t \in [a,b]$, $\forall \bar{y}_1, \bar{y}_2 \in \mathbb{R}^m$ $(f(t,y_1)-f(t,y_2), \bar{y}_1-\bar{y}_2) \leq 0$

με το συμβολισμο $(\cdot,\cdot)$ θεωρουμε το ευκλειδειο εσωτερικο γινομενο και $\|\cdot\|$ αντιστοιχη στην ευκλ νορμα, τοτε

$\|y(t)-z(t)\| \leq \|y_0-z_0\|$

$$\boxed{(\cdot,\cdot) = \|\cdot\|^2}$$

<u># παραδειγμα #</u>

Στη περιπτωση του γραμμικου συστηματος ΣΔΕ

$\begin{cases} \bar{y}'(t) = A(t)\bar{y}(t) + \bar{g}(t) \ , \ t \in [a,b] \\ \bar{y}(a) = \bar{y}_0 \end{cases}$

ικανοποιειται η (S) αν και μονο αν ο πινακας $A(t)$, $t \in [a,b]$ ειναι μη θετικα ορισμενος, δηλ $\forall t \in [a,b]$, $\forall \bar{x} \in \mathbb{R}^m$ $(A\bar{x}, \bar{x}) \leq 0$ που αποτελει την αντιστοιχη μη θετικοτητας της (*)

$$\boxed{(*): \begin{cases} y'=\lambda y \ , \ t>0, \ \lambda \in \mathbb{R}^- \\ y(0)=1 \end{cases}}$$

 # Παραδειγμα # (σημαντικο)

Εστω η γραμμικη εξισωση $y' = \lambda y$ (εστω το προβλημα δοκιμης)
με $\lambda = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$ τοτε η λυση $y = y_1 + i y_2$ μπορουμε
να γραψουμε το συστημα ως

$$y' = (y_1 + y_2)' = (a + ib)(y_1 + iy_2) \Rightarrow (y_1 + iy_2)' = ay_1 + iay_2 + iby - by_2$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \underbrace{\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Θελουμε $(Ax, x) \leq 0 \Rightarrow a \|x\|^2 \leq 0$, $\forall \bar{x} \in \mathbb{R}^2$
το οποιο ικανοποιειται οταν το a μη θετικο δηλ $a \leq 0$